

3. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $\mathbf{a} = [1, -2]$

$D(f) = \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x|y|}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \sqrt{-x|y|}, & x < 0. \end{cases}$$

f je spojitá v proměnné x i v proměnné y - použijeme pro výpočet derivací v nulách.

Pro $y \neq 0$ platí následující.

$$x > 0 \implies f'_x(x, y) = \frac{|y|}{2\sqrt{x|y|}}$$

$$x < 0 \implies f'_x(x, y) = \frac{-|y|}{2\sqrt{-x|y|}}$$

$$x = 0 \implies f'_x{}^+(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|y|}{2\sqrt{x|y|}} = \frac{|y|}{2\sqrt{|y|}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$$

$$x = 0 \implies f'_x{}^-(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-|y|}{2\sqrt{-x|y|}} = \frac{-|y|}{2\sqrt{|y|}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{-x}} = -\infty$$

Platí, že $f'_x(0, y)$ pro $y \neq 0$ neexistuje.

Je-li $y = 0$, pak $f(x, y) = 0$. Z definice vyplývá, že $f'_x(x, 0) = 0$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

Jelikož $f(x, y) = f(y, x)$, tak platí $f'_y(x, y) = f'_x(y, x)$. Proto platí následující.

Pro $x \neq 0$ platí:

$$y > 0 \implies f'_y(x, y) = \frac{|x|}{2\sqrt{y|x|}}$$

$$y < 0 \implies f'_y(x, y) = \frac{-|x|}{2\sqrt{-y|x|}}$$

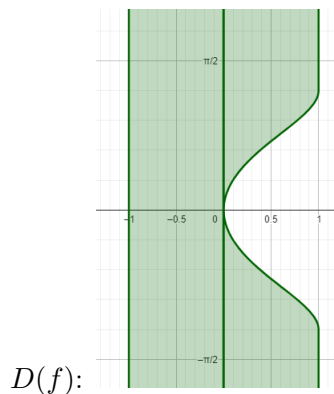
Dále $f'_y(x, 0)$ pro $x \neq 0$ neexistuje a $f'_y(0, y) = 0$ pro libovolné $y \in \mathbb{R}$.

Tečná rovina: počítejme z definice.

$$\begin{aligned} T(x, y) &= f(1, -2) + f'_x(1, -2) \cdot (x - 1) + f'_y(1, -2) \cdot (y - (-2)) = \\ &= \sqrt{|1 \cdot (-2)|} + \frac{|-2|}{2\sqrt{1 \cdot |-2|}} \cdot (x - 1) + \frac{-|1|}{2\sqrt{-(-2) \cdot |1|}} \cdot (y + 2) = \\ &= \sqrt{2} + \frac{(x - 1)}{\sqrt{2}} + \frac{-y - 2}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Příklad 1 (b) $f(x, y) = \sqrt{y^2 - \arcsin x}$, $\mathbf{a} = [0, 1]$.

$D(f) = [|x| \leq 1, y^2 - \arcsin x \geq 0] = [x \in [-1, 0]] \cup [x \in (0, 1], y^2 \geq \arcsin x] = [x \in [-1, 0]] \cup [x \in (0, 1], y \in (-\infty, -\sqrt{\arcsin x}] \cup [\sqrt{\arcsin x}, \infty)]$



$$f'_x(x, y) = \frac{-1}{2\sqrt{y^2 - \arcsin x} \cdot \sqrt{1 - x^2}} \text{ pro } x \in (-1, 1), y^2 > \arcsin x$$

Parciální derivaci podle x nemá smysl počítat ve vynechaných bodech (definiční obor neobsahuje vodorovnou úsečku kolem nich).

$$f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{y^2 - \arcsin x}} \text{ pro } x \in [-1, 1], y^2 > \arcsin x$$

Parciální derivaci podle y nemá smysl počítat ve vynechaných bodech až na počátek, neb definiční obr neobsahuje svislou úsečku kolem nich.

Spočtíme ještě $f'_y(0, 0)$ (nelze počítat jako výše, protože odmocnina ve jmenovateli vychází 0).

f jakožto funkce proměnné y je v bodě $[0, 0]$ spojitá. Použijeme tedy Větu 44 - ZS z minulého semestru.

$$\begin{aligned} f_y^+(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} f'_y(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\sqrt{y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ f_y^-(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0^-} f'_y(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{\sqrt{y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0^-} -1 = -1 \end{aligned}$$

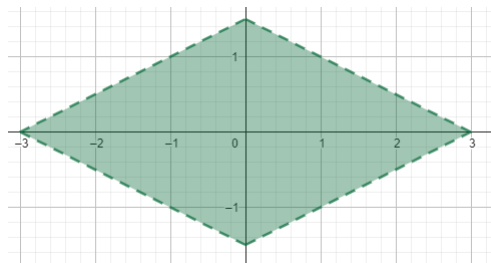
Limity vycházejí různě, tedy $f'_y(0, 0)$ neexistuje.

Obě derivace jsou na okolí $[0, 1]$ spojitě, má tedy smysl uvažovat tečnou rovinu. Z definice dostáváme:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= f(0, 1) + f'_x(0, 1) \cdot (x - 0) + f'_y(0, 1) \cdot (y - 1) = \\ &= \sqrt{1 - 0} + \frac{-1}{2} \cdot x + 1 \cdot (y - 1) = y - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Příklad 1 (c) $f(x, y) = \log(e^3 - e^{|x|+2|y|})$, $\mathbf{a} = [1, \frac{1}{2}]$

$$D(f) = [e^3 - e^{|x|+2|y|} > 0] = [e^3 > e^{|x|+2|y|}] = [3 > |x| + 2|y|]$$



$D(f)$:

Při výpočtu f'_x pro $x = 0$ a f'_y pro $y = 0$ použijeme Větu 44 - ZS z minulého semestru.

$$\begin{aligned}
 f'_x(x, y) &= \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot \frac{\partial |x|}{\partial x}}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} = \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot \operatorname{sgn}(x)}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} \text{ pro } x \neq 0 \\
 f_x^+(0, y) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f'_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-e^{|x|+2|y|}}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} = \frac{-e^{2|y|}}{e^3 - e^{2|y|}} \\
 f_x^-(0, y) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f'_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^{|x|+2|y|}}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} = \frac{e^{2|y|}}{e^3 - e^{2|y|}} \\
 f'_y(x, y) &= \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot \frac{\partial 2|y|}{\partial y}}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} = \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot 2 \operatorname{sgn}(y)}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} \text{ pro } y \neq 0 \\
 f_y^+(x, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0+} f'_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{-2e^{|x|+2|y|}}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} = \frac{-2e^{|x|}}{e^3 - e^{|x|}} \\
 f_y^-(x, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0-} f'_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-} \frac{2e^{|x|+2|y|}}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} = \frac{2e^{|x|}}{e^3 - e^{|x|}}
 \end{aligned}$$

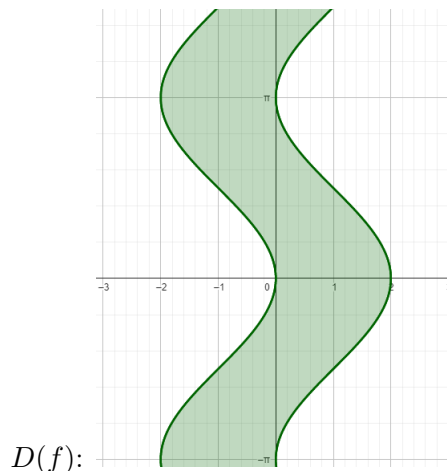
Derivace $f'_x(0, y)$ a $f'_y(x, 0)$ neexistují.

Obě derivace jsou na okolí $[1, \frac{1}{2}]$ spojité, má tedy smysl uvažovat tečnou rovinu. Z definice dostáváme:

$$\begin{aligned}
 T(x, y) &= f\left(1, \frac{1}{2}\right) + f'_x\left(1, \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1) + f'_y\left(1, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) = \\
 &= \log(e^3 - e^2) + \frac{-e^2}{e^3 - e^2} \cdot (x - 1) + \frac{-2e^2}{e^3 - e^2} \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) = \\
 &= \log(e^3 - e^2) - \frac{1}{e - 1}(x - 1) - \frac{2}{e - 1}\left(y - \frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Příklad 1 (d) $f(x, y) = \arccos(x - \cos y)$, $\mathbf{a} = [1, 0]$

$$D(f) = [x - \cos y \in [-1, 1]] = [x \in [-1 + \cos y, 1 + \cos y]]$$



$$f'_x(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (x - \cos y)^2}}, \quad -1 + \cos y < x < 1 + \cos y$$

$$f'_y(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (x - \cos y)^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x - \cos y) = \frac{-1 \cdot (-1) \cdot (-\sin y)}{\sqrt{1 - (x - \cos y)^2}} =$$

$$= \frac{-\sin y}{\sqrt{1 - (x - \cos y)^2}}, \quad -1 + \cos y < x < 1 + \cos y$$

Ve vynechaných bodech nemá smysl derivace počítat - vyjma bodů $[0, k\pi], k \in \mathbb{Z}$. Zde použijeme opět Větu 44 - ZS z minulého semestru.

$$f_y^{'+}(0, k\pi) = \lim_{y \rightarrow k\pi+} f'_y(0, y) = \lim_{y \rightarrow k\pi+} \frac{-\sin y}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \lim_{y \rightarrow k\pi+} \frac{-\sin y}{|\sin y|} \stackrel{(\heartsuit)}{=} \lim_{y \rightarrow k\pi+} (-1)^{k+1} = (-1)^{k+1}$$

$$f_y^{'-}(0, k\pi) = \lim_{y \rightarrow k\pi-} f'_y(0, y) = \lim_{y \rightarrow k\pi-} \frac{-\sin y}{|\sin y|} \stackrel{\text{analogicky k } (\heartsuit)}{=} \lim_{y \rightarrow k\pi-} (-1)^k = (-1)^k$$

$$(\heartsuit): \begin{cases} \sin y > 0 \text{ pro } y \in (k\pi, (k + \frac{1}{4})\pi) \implies \frac{-\sin y}{|\sin y|} = \frac{-\sin y}{\sin y} = -1, & k \text{ sudé} \\ \sin y < 0 \text{ pro } y \in (k\pi, (k + \frac{1}{4})\pi) \implies \frac{-\sin y}{|\sin y|} = \frac{-\sin y}{-\sin y} = 1, & k \text{ liché} \end{cases}$$

$f'_y(0, k\pi)$ neexistuje.

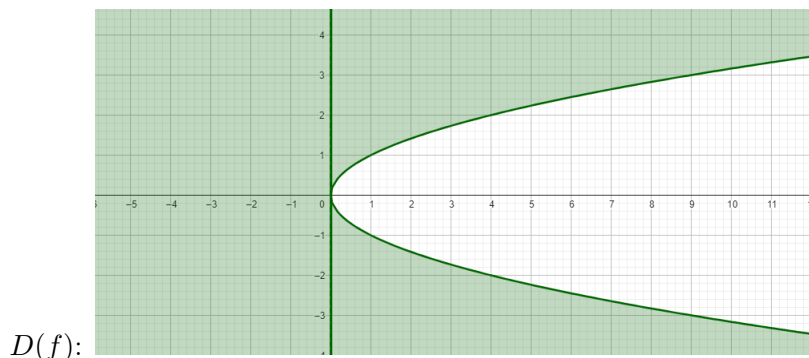
Obě derivace jsou na okolí $[1, 0]$ spojité, má tedy smysl uvažovat tečnou rovinu. Z definice dostáváme:

$$T(x, y) = f(1, 0) + f'_x(1, 0) \cdot (x - 1) + f'_y(1, 0) \cdot (y - 0) =$$

$$= \arccos(0) + \frac{-1}{\sqrt{1 - 0}} \cdot (x - 1) + \frac{\sin 0}{\sqrt{1 - 0}} \cdot y = \frac{\pi}{2} + 1 - x$$

Příklad 1 (e) $f(x, y) = \sqrt{y^6 - x^3}$, $\mathbf{a} = [0, 2]$

$$\begin{aligned} D(f) &= [y^6 \geq x^3] = [x \leq 0] \cup [|y| \geq \sqrt{x}, x > 0] = \\ &= [x \leq 0] \cup [y \leq -\sqrt{x}, x > 0] \cup [y \geq \sqrt{x}, x > 0] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{-3x^2}{2\sqrt{y^6 - x^3}}, x < y^2 \\ f'_y(x, y) &= \frac{6y^5}{2\sqrt{y^6 - x^3}}, x < y^2 \end{aligned}$$

Z vynechaných bodů má smysl zkoumat pouze derivaci podle proměnné y v počátku, zbylé parciální derivace nemá smysl počítat, neboť funkce není definována na žádné úsečce příslušného směru. Počítáme opět dle Věty 44 - ZS minulého semestru.

$$\begin{aligned} f_y^{'+}(0, y) &= \lim_{y \rightarrow 0+} f'_y(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{6y^5}{2|y^3|} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{6y^5}{2y^3} = \lim_{y \rightarrow 0+} 3y^2 = 0 \\ f_y^{'-}(0, y) &= \lim_{y \rightarrow 0-} f'_y(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0-} \frac{6y^5}{2|y^3|} = \lim_{y \rightarrow 0-} \frac{6y^5}{-2y^3} = \lim_{y \rightarrow 0-} -3y^2 = 0 \end{aligned}$$

Tedy $f'_y(0, 0) = 0$

Obě derivace jsou na okolí $[0, 2]$ spojité, má tedy smysl uvažovat tečnou rovinu. Z definice dostáváme:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= f(0, 2) + f'_x(0, 2) \cdot (x - 0) + f'_y(0, 2) \cdot (y - 2) = \\ &= \sqrt{2^6} + 0 \cdot x + \frac{6 \cdot 2^5}{2 \cdot \sqrt{2^6}} \cdot (y - 2) = 8 + 12 \cdot (y - 2) \end{aligned}$$

Příklad 1 (f) $f(x, y) = \max\{y - \cos x, 0\}$, $\mathbf{a} = [0, \pi]$

$$D(f) = \mathbb{R}^2$$

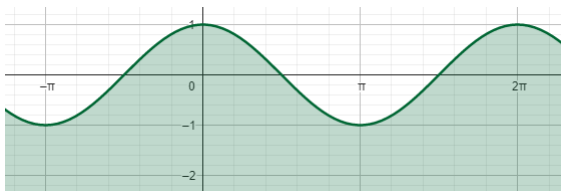
$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & y - \cos x \leq 0 \\ y - \cos x, & y - \cos x > 0. \end{cases}$$

Parciální derivace funkce lze vždy (z definice) počítat na pouze na otevřených množinách. Funkci f tedy můžeme zderivovat na otevřených množinách $[y - \cos x < 0]$, $[y - \cos x > 0]$ (otevřené dle Věty 11 z 2. cvičení).

$$f'_x(x, y) = 0 = f'_y(x, y), y - \cos x < 0$$

$$f'_x(x, y) = \sin x, y - \cos x > 0$$

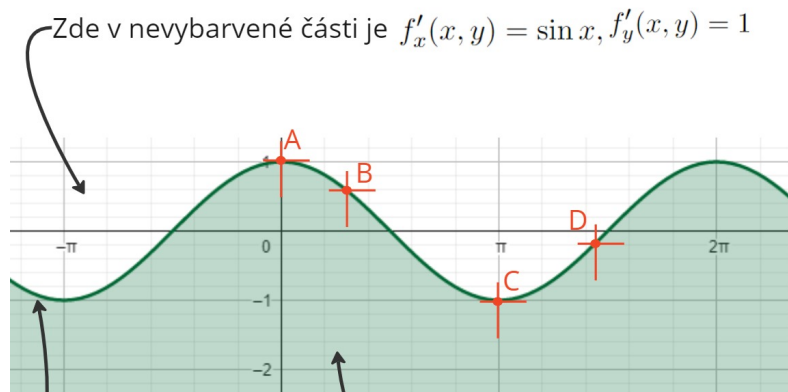
$$f'_y(x, y) = 1, y - \cos x > 0$$



$$[y - \cos x \leq 0] = [y \leq \cos x]:$$

Ve vynechaných bodech - tj. v bodech mimo množiny $[y - \cos x < 0]$, $[y - \cos x > 0]$, tj. v bodech $[y = \cos x]$ - počítáme opět dle Věty 44 - ZS minulého semestru. Nechť $k \in \mathbb{Z}$.

K použití Věty 44 - ZS z minulého semestru bude potřeba znát v daných bodech, ve kterých směrech má parciální derivace jaký předpis. Vizte pomocný obrázek níže.



Zde v nevybarvené části je $f'_x(x, y) = \sin x, f'_y(x, y) = 1$

bod	f'_x zleva	f'_x zprava	f'_y shora	f'_y zdola
A	$\sin x,$	$\sin x,$	1	0
B	0	$\sin x,$	1	0
C	0	0	1	0
D	$\sin x,$	0	1	0

Zde, ve vybarvené oblasti je $f'_x(x, y) = 0 = f'_y(x, y)$

V bodech této křivky je potřeba derivace dopočítat

miro

Proto je si rozdělíme body následujícím způsobem (body typu A, B, C, D), vizte níže.

$$\begin{aligned}
x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) &\implies f_x^+(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} \sin t = \sin x \\
x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) &\implies f_x^-(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} 0 = 0 \\
x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi) &\implies f_x^+(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} 0 = 0 \\
x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi) &\implies f_x^-(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} \sin t = \sin x \\
x = 2k\pi &\implies f_x^+(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} \sin t = \sin x \\
x = 2k\pi &\implies f_x^-(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} \sin t = \sin x \\
x = (2k+1)\pi &\implies f_x^+(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} 0 = 0 \\
x = (2k+1)\pi &\implies f_x^-(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} 0 = 0 \\
f_y^+(x, \cos x) &= \lim_{t \rightarrow \cos x+} f'_y(x, t) = \lim_{t \rightarrow \cos x+} 1 = 1 \\
f_y^-(x, \cos x) &= \lim_{t \rightarrow \cos x-} f'_y(x, t) = \lim_{t \rightarrow \cos x-} 0 = 0
\end{aligned}$$

Derivace podle x tedy existují jen v bodech $[k\pi, \cos(k\pi)]$ a vycházejí 0, derivace podle y neexistují nikde.

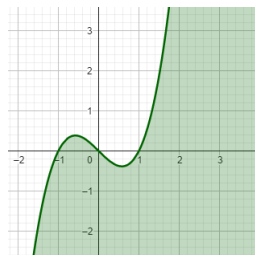
Obě derivace jsou na okolí $[0, \pi]$ spojité, má tedy smysl uvažovat tečnou rovinu. Z definice dostáváme:

$$\begin{aligned}
T(x, y) &= f(0, \pi) + f'_x(0, \pi) \cdot (x - 0) + f'_y(0, \pi) \cdot (y - \pi) = \\
&= \pi - 1 + 0 + 1 \cdot (y - \pi) = y - 1
\end{aligned}$$

Příklad 1 (g) $f(x, y) = \max\{y + x, x^3\}$

$$D(f) = \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3, & x^3 \geq y + x \\ y + x, & \text{jinak.} \end{cases}$$



$$[x^3 \geq y + x] = [y \leq x^3 - x]:$$

$$\begin{aligned}
f'_x(x, y) &= 3x^2, & x^3 > y + x \\
f'_x(x, y) &= 1, & x^3 < y + x \\
f'_y(x, y) &= 0, & x^3 > y + x \\
f'_y(x, y) &= 1, & x^3 < y + x
\end{aligned}$$

Body, ve kterých se růst funkce $y = x^3 - x$ mění v klesání a naopak jsou ty, kde je nulová derivace, tedy ty, kde $3x^2 - 1 = 0$. Tedy jde o $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Funkční hodnoty jsou $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \mp \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \mp \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}} \mp \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\pm \frac{1}{3} \mp 1\right) = \mp \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$. Jde tedy o hodnoty

Vyšetřeme derivace v bodech křivky $y = x^3 - x$ pomocí Věty 44 - ZS z minulého semestru.

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right) \implies f'_x(x, x^3 - x) = \lim_{t \rightarrow x+} f'_x(t, x^3 + x) = \lim_{t \rightarrow x+} 3t^2 = 3x^2$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right) \implies f'_x(x, x^3 - x) = \lim_{t \rightarrow x-} f'_x(t, x^3 + x) = \lim_{t \rightarrow x-} 1 = 1$$

$$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \implies f'_x(x, x^3 - x) = \lim_{t \rightarrow x+} f'_x(t, x^3 + x) = \lim_{t \rightarrow x+} 1 = 1$$

$$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \implies f'_x(x, x^3 - x) = \lim_{t \rightarrow x-} f'_x(t, x^3 + x) = \lim_{t \rightarrow x-} 3t^2 = 3x^2$$

$$f'_x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = \lim_{t \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}+} f'_x\left(t, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = \lim_{t \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}+} 1 = 1$$

$$f'_x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = \lim_{t \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}-} f'_x\left(t, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = \lim_{t \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}-} 1 = 1$$

$$f'_x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}+} f'_x\left(t, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}+} 3t^2 = 1$$

$$f'_x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}-} f'_x\left(t, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}-} 3t^2 = 1$$

$$f'_y(x, x^3 - x) = \lim_{t \rightarrow x^3 - x+} f'_y(x, t) = \lim_{t \rightarrow x^3 - x+} 1 = 1$$

$$f'_y(x, x^3 - x) = \lim_{t \rightarrow x^3 - x-} f'_y(x, t) = \lim_{t \rightarrow x^3 - x-} 0 = 0$$

Parciální derivace existují pouze v bodech $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$ podle x a vycházejí 1.

Příklad 3

Podívejte se na příklad 2 tu.